ВАРИАНТ 13

1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p-q$.

   Ответ: $\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{35}$.

   Решение. В силу того, что выпадение орла и решки равновозможны, вероятность получить 90 орлов равна вероятности получить 90 решек (т.е. 0 орлов); вероятность получить 89 орлов равна вероятности получить 89 решек (т.е. одного орла) и т.д. Обозначим вероятность, что выпало ровно k орлов через p_k. Тогда $p = p_{55} + p_{56} + \ldots + p_{90}$, $q = p_0 + p_1 + \ldots + p_{34}$, а в силу сказанного выше, $q = p_{90} + p_{89} + \ldots + p_{56}$. Значит, $p - q = p_{55}$.

   Посчитаем вероятность того, что орёл выпадает ровно 55 раз при 90 бросках. Если обозначить выпадение орла единицей, а выпадение решки нулём, то каждую последовательность из 90 бросков можно охарактеризовать последовательностью цифр из нулей и единиц. Вероятность получить любую из таких последовательностей равна $\frac{1}{2^{90}}$. Нас устроят все те последовательности событий, которые содержат ровно 35 единиц. Их количество равно C_{90}^{35} (выбираем из имеющихся 90 позиций 35 позиций для единиц, после чего остальные позиции заполняются нулями). Значит, вероятность получить хотя бы одну такую последовательность равна $\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{35}$. Это и есть p_{55}.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$.

   Ответ: $x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \neq 11p + 4$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

   Решение. Приводя дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получаем

$$\frac{\cos 8x \cos 3x - \cos 8x \sin 3x + \cos 3x \sin 8x + \sin 3x \sin 8x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\cos 5x + \sin 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2}.$$

   Последнее уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} \cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2}\cos 6x, \\ \cos 6x \neq 0. \end{cases}$ Уравнение системы даёт

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - \dfrac{\pi}{4} = 6x + 2\pi k, \\ 5x - \dfrac{\pi}{4} = -6x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{44} + \dfrac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

   Теперь учтём условие $\cos 6x \neq 0$.

   Если $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, то $\cos 6x = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} + 12\pi k\right) = 0$, т.е. условие $\cos 6x \neq 0$ нарушается.

   Если $x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, то $\cos 6x = \cos\left(\frac{3\pi}{22} + \frac{12\pi k}{11}\right)$. Найдём те целые значения n и k, при которых выполняется равенство $\frac{3\pi}{22} + \frac{12\pi k}{11} = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Получаем $12k = 4 + 11n$, $k = n - \frac{n-4}{12}$. Поскольку $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{Z}$, отсюда следует, что $p = \frac{n-4}{12} \in \mathbb{Z}$. Значит, $n = 12p + 4$, $k = 11p + 4$. Полученные значения переменной k необходимо исключить. Окончательно получаем $x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \neq 11p + 4$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $27^{\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{\sqrt{4\log_3 x}} + 40 \cdot x^{\sqrt{\log_x 3}} \leqslant 48$.

   Ответ: $x \in (1; 3] \cup \left\{4^{\log_3 4}\right\}$.

   Решение. Заметим, что $x^{\sqrt{\log_x 3}} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\sqrt{\log_x 3}} = 3^{\sqrt{\log_3^2 x \cdot \log_x 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$. Значит, неравенство можно переписать в виде $3^{3\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 x}} + 40 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leqslant 48$. (Отметим, что при этом

© МФТИ, 2020

изменилась область допустимых значений: исчезло ограничение $x \neq 1$, которое необходимо будет учесть в дальнейшем.) Обозначим $t = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$. Тогда получаем $t^3 - 11t^2 + 40t - 48 \leqslant 0$, или, раскладывая левую часть на множители, $(t-3)(t-4)^2 \leqslant 0$, откуда следует, что $t \in (-\infty; 3] \cup \{4\}$.

Возвращаясь к переменной x, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leqslant 3, \\ 3^{\sqrt{\log_3 x}} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_3 x} \leqslant 1, \\ \sqrt{\log_3 x} = \log_3 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \log_3 x \leqslant 1, \\ \log_3 x = \log_3^2 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x = 4^{\log_3 4}. \end{array}\right.$$

Выше было получено, что $x \neq 1$, поэтому окончательный результат таков: $x \in (1; 3] \cup \left\{4^{\log_3 4}\right\}$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника KLM.

   б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

   Ответ: а) $S_{KLM} = 9{,}8$; б) $V_{SABC} = \frac{1372}{3}$.

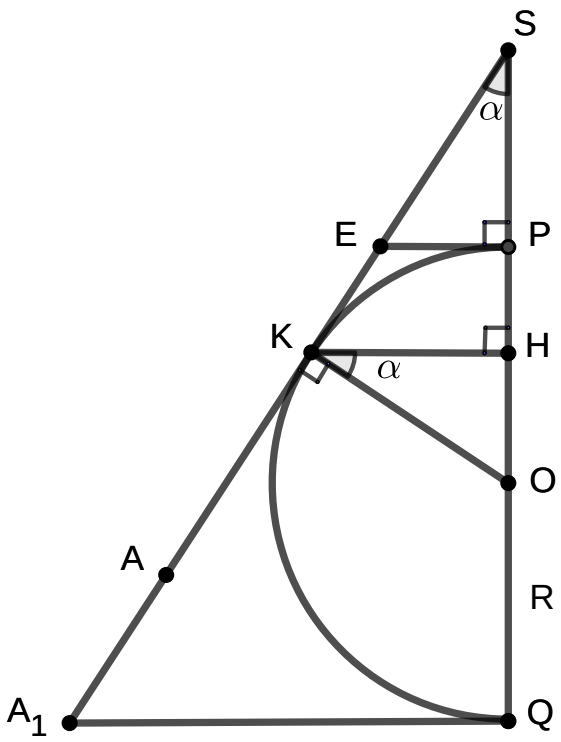

Рис. 1: вариант 13, задача 4

Решение. а) Пусть радиус сферы равен R. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK = OL = OM = R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$ (обозначим эти углы через α; $\sin\alpha = \frac{2}{5}$); высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть σ – касательная плоскость к сфере, проведённая через точку P. Обозначим точку

© МФТИ, 2020

пересечения σ и SA через E. Рассмотрим сечение пирамиды и сферы плоскостью ASO (см. рис.; на рисунке изображена лишь часть этого сечения).

Из прямоугольного треугольника KSO получаем $SO = \frac{R}{\sin\alpha}$. Тогда $SP = SO - OP = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$. Пусть площадь сечения пирамиды плоскостью σ равна $S_0 = 5$, а плоскостью τ – S_{KLM}. Из подобия следует, что $S_{KLM} : S_0 = (KH : EP)^2 = (SH : SP)^2 = (SO - OH)^2 : SP^2 = \left(\frac{R}{\sin\alpha} - R\sin\alpha\right)^2 : R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1 + \sin\alpha)^2$. Следовательно, $S_{KLM} = S_0(1 + \sin\alpha)^2 = 9{,}8$.

б) Если плоскости τ и ABC параллельны, то точка A совпадает с точкой A_1 такой, что $A_1Q \perp SO$ (см. рис.). Тогда, обозначив площадь треугольника ABC через S_{ABC}, получаем $V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot SQ\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot(SO+R)\cdot S_0\cdot\left(\frac{SQ}{SP}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot(SO+SO\sin\alpha)\cdot S_0\cdot(SO+SO\sin\alpha)^2 : (SO-SO\sin\alpha)^2 = \frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_0\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^3}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{1372}{3}$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

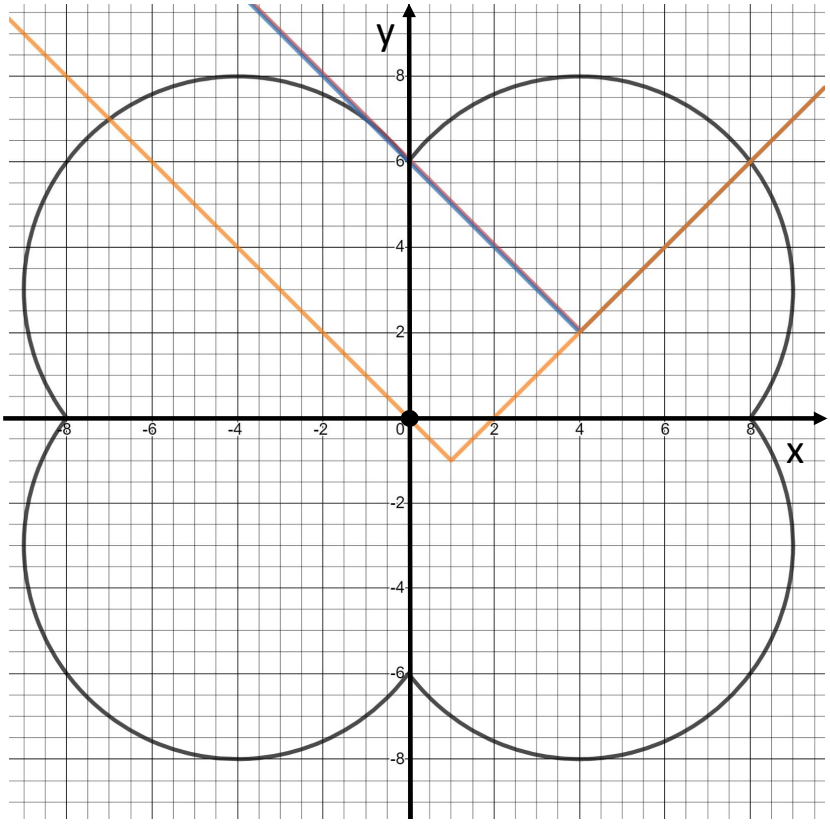

Рис. 2: вариант 13, задача 5

Ответ. $a \in \left\{1; 16; \left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2\right\}$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$. Это означает, что множество точек, задаваемых этим уравнением, симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти (включая её границы), раскрывая модули,

© МФТИ, 2020

мы получаем $(x-4)^2+(y-3)^2=25$. Это уравнение задаёт окружность с центром $(4;3)$ радиуса 5. В первой четверти лежит дуга этой окружности и точка $O(0;0)$. Отображая эту дугу симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, получаем множество точек, задаваемых вторым уравнением (см. рисунок).

Геометрическое место точек, заданных первым уравнением, представляет собой совокупность двух лучей ℓ_1 и ℓ_2 с началом в точке $(\sqrt{a},\sqrt{a}-2)$, образующие с положительным направлением оси Ox углы $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$ соответственно.

Отметим, что луч ℓ_2 является частью прямой $y=x-2$ при любом a и не пересекается с полуплоскостью $x<0$. Этот луч либо пересекает график второго уравнения системы в точке $(8;6)$, либо не пересекает его вовсе. Последний случай не подходит, т.к. при нём луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения не более чем в двух точках. Таким образом, для того чтобы система имела три решения, необходимо, чтобы луч ℓ_1 пересекал график второго уравнения два раза, а луч ℓ_2 – один раз.

Рассмотрим положения луча ℓ_1 при различных a. Если $a\in(0;1)\cup(1;16)$, луч ℓ_1 пересекает только дугу окружности, лежащую во второй четверти (назовём её ω). Если $a=1$, луч ℓ_1 дополнительно проходит через точку O и имеет два пересечения с графиком второго уравнения. Если $a=16$, луч ℓ_1 проходит через точку $(0;6)$, принадлежащую графику второго уравнения, а также пересекает дугу ω. При $a\in\left(16,\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2\right)$ луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения трижды: дважды он пересекает дугу ω, а один раз – дугу, лежащую в первой четверти. При $a=\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 касается дуги ω и пересекает дугу окружности в первой четверти (это значение параметра найдено ниже). Наконец, при $a>\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 может пересечь только дугу окружности, лежащую в первой четверти, и общее количество точек пересечения графиков не превосходит двух. Таким образом, $a\in\left\{1;16;\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2\right\}$.

Значение $a=\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2$, соответствующее касанию ℓ_1 и ω, можно найти, например, так. Пусть $Q(-4;3)$ – центр окружности, содержащей дугу ω, P – точка касания ℓ_1 и ω. Так как угловой коэффициент ℓ_1 равен (-1), то угловой коэффициент радиуса QP равен 1, откуда следует, что координаты точки P – это $\left(-4+5\cos\frac{\pi}{4};3+5\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку луч ℓ_1 с уравнением $y=-(x-\sqrt{a})+\sqrt{a}-2$ проходит через точку P, получаем $3+\frac{5}{\sqrt{2}}=2\sqrt{a}+2-\frac{5}{\sqrt{2}}$, откуда $a=\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{2}\right)^2$.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=2$.

Ответ: а) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{3}{2}$; б) $R_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $R_2=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2=\alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Тогда из условия касания $\angle O_2BE=\frac{\pi}{2}-\alpha$, а $\angle BO_2P=\frac{\pi}{2}-\angle O_2BE=\alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2}=2S_{O_1BO_2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot BO_1\cdot BO_2\cdot\sin\alpha=R_1R_2\sin\alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2}O_2P\cdot BE=\frac{1}{2}R_2\cos\alpha\cdot 2R_2\sin\alpha=R_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}}=\frac{R_1}{R_2\cos\alpha}=2$, то есть $\frac{1}{2}R_1=R_2\cos\alpha$. Далее, $AB=DP$, откуда $2R_1=R_2+R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1=R_2+\frac{1}{2}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1}=\frac{3}{2}$.

© МФТИ, 2020

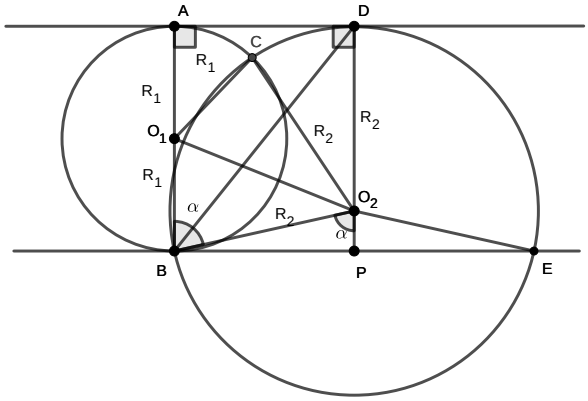

Рис. 3: вариант 13, задача 6

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем $BD^2 = AB^2 + AD^2$, то есть $BD^2 = 4R_1^2 + BP^2 = 4R_1^2 + (R_2 \sin\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (R_2\cos\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2$. Итак, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{2}$ и $4R_1R_2 = 2^2 = 4$. Отсюда $R_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $R_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 90 + x - 6^{90}, \\ y \leqslant \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot 6^{180} - \frac{7}{10} \cdot 6^{90} + \frac{456}{5}$.

Решение. Пусть $f(x) = \log_6 x$, $g(x) = 90 + x - 6^{90}$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вверх, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Заметим, что $f(x)$ определена только при положительных x, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$, $g(0) < 0$ и $g(1) < 0$. Поэтому абсцисса одной из общих точек лежит на интервале $0 < x < 1$. Координаты другой точки легко подбираются. Действительно, $f\left(6^{90}\right) = \log_6 6^{90} = 90 = 90 + 6^{90} - 6^{90} = g\left(6^{90}\right)$. Обозначим эти общие точки A и B соответственно, а точку $(1; 90)$ обозначим C. Пусть S_1 – количество целочисленных точек, лежащих в треугольнике ABC, включая его границу, а S_2 – количество целочисленных точек, лежащих в криволинейном треугольнике ABC (AB – часть графика логарифмической функции, BC и AC – отрезки), исключая те, которые лежат на AB. Тогда искомое количество есть $S_1 - S_2$.

Количество S_1 равно $1 + 2 + \ldots + 6^{90} = \frac{\left(1+6^{90}\right)6^{90}}{2}$. Найдём S_2. Так как $\log_6 6^k = k$, то на прямой $y = k$ лежат $6^k - 1$ требуемых точек (мы исключаем точки, лежащие на графике логарифмической функции). Тогда $S_2 = (6-1) + (6^2-1) + \ldots + (6^{90}-1) = 6 \cdot \frac{6^{90}-1}{5} - 90 = \frac{6^{91}-456}{5}$.

Значит, $S_1 - S_2 = \frac{\left(1+6^{90}\right)6^{90}}{2} - \frac{6^{91}-456}{5} = \frac{1}{2} \cdot 6^{180} - \frac{7}{10} \cdot 6^{90} + \frac{456}{5}$.

© МФТИ, 2020

ВАРИАНТ 14

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p-q$.

   Ответ: $-\frac{1}{2^{70}}\cdot C_{70}^{28}$.

   Решение. В силу того, что выпадение орла и решки равновозможны, вероятность получить 70 орлов равна вероятности получить 70 решек (т.е. 0 орлов); вероятность получить 69 орлов равна вероятности получить 69 решек (т.е. одного орла) и т.д. Обозначим вероятность, что выпало ровно k орлов через p_k. Тогда $p=p_{43}+p_{44}+\ldots+p_{70}$, $q=p_0+p_1+\ldots+p_{28}$, а в силу сказанного выше, $q=p_{70}+p_{69}+\ldots+p_{42}$. Значит, $p-q=-p_{42}=-p_{28}$.

   Посчитаем вероятность того, что орёл выпадает ровно 28 раз при 70 бросках. Если обозначить выпадение орла единицей, а выпадение решки нулём, то каждую последовательность из 70 бросков можно охарактеризовать последовательностью цифр из нулей и единиц. Вероятность получить любую из таких последовательностей равна $\frac{1}{2^{70}}$. Нас устроят все те последовательности событий, которые содержат ровно 28 единиц. Их количество равно C_{70}^{28} (выбираем из имеющихся 70 позиций 28 позиций для единиц, после чего остальные позиции заполняются нулями). Значит, вероятность получить хотя бы одну такую последовательность равна $\frac{1}{2^{70}}\cdot C_{70}^{28}$. Это и есть p_{28}.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x-\sin 3x}+\frac{\sin 4x}{\cos 3x+\sin 3x}=\sqrt{2}$.

   Ответ: $x=\frac{\pi}{52}+\frac{2\pi k}{13}$, $k\neq 13p-5$, $k\in\mathbb{Z}$, $p\in\mathbb{Z}$.

   Решение. Приводя дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получаем

$$\frac{\cos 4x\cos 3x+\cos 4x\sin 3x+\cos 3x\sin 4x-\sin 3x\sin 4x}{\cos^2 3x-\sin^2 3x}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\cos 7x+\sin 7x}{\cos 6x}=\sqrt{2}.$$

   Последнее уравнение эквивалентно системе $\begin{cases}\cos 7x+\sin 7x=\sqrt{2}\cos 6x,\\ \cos 6x\neq 0.\end{cases}$ Уравнение системы даёт

$$\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 6x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x-\dfrac{\pi}{4}=6x+2\pi k,\\ 7x-\dfrac{\pi}{4}=-6x+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{52}+\dfrac{2\pi k}{13}, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

   Теперь учтём условие $\cos 6x\neq 0$.

   Если $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, то $\cos 6x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+12\pi k\right)=0$, т.е. условие $\cos 6x\neq 0$ нарушается.

   Если $x=\frac{\pi}{52}+\frac{2\pi k}{13}$, то $\cos 6x=\cos\left(\frac{3\pi}{26}+\frac{12\pi k}{13}\right)$. Найдём те целые значения n и k, при которых выполняется равенство $\frac{3\pi}{26}+\frac{12\pi k}{13}=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Получаем $12k=5+13n$, $k=n+\frac{n+5}{12}$. Поскольку $k\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{Z}$, отсюда следует, что $p=\frac{n+5}{12}\in\mathbb{Z}$. Значит, $n=12p-5$, $k=13p-5$. Полученные значения переменной k необходимо исключить. Окончательно получаем $x=\frac{\pi}{52}+\frac{2\pi k}{13}$, $k\neq 13p-5$, $k\in\mathbb{Z}$, $p\in\mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $8^{\sqrt{\log_2 x}}-7\cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}}+60\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}}\leqslant 72$.

   Ответ: $x\in(1;2]\cup\left\{6^{\log_2 6}\right\}$.

   Решение. Заметим, что $x^{\sqrt{\log_x 2}}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\sqrt{\log_x 2}}=2^{\sqrt{\log_2^2 x\cdot\log_x 2}}=2^{\sqrt{\log_2 x}}$. Значит, неравенство можно переписать в виде $2^{3\sqrt{\log_2 x}}-14\cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}}+60\cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}}\leqslant 72$. (Отметим, что при этом

© МФТИ, 2020

изменилась область допустимых значений: исчезло ограничение $x \neq 1$, которое необходимо будет учесть в дальнейшем.) Обозначим $t = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$. Тогда получаем $t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leqslant 0$, или, раскладывая левую часть на множители, $(t-2)(t-6)^2 \leqslant 0$, откуда следует, что $t \in (-\infty; 2] \cup \{6\}$.

Возвращаясь к переменной x, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leqslant 2, \\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_2 x} \leqslant 1, \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \log_2 x \leqslant 1, \\ \log_2 x = \log_2^2 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x = 6^{\log_2 6}. \end{array}\right.$$

Выше было получено, что $x \neq 1$, поэтому окончательный результат таков: $x \in (1; 2] \cup \left\{6^{\log_2 6}\right\}$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM.

   б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

   Ответ: а) $S_{KLM} = \frac{49}{8}$; б) $V_{SABC} = \frac{1029}{2}$.

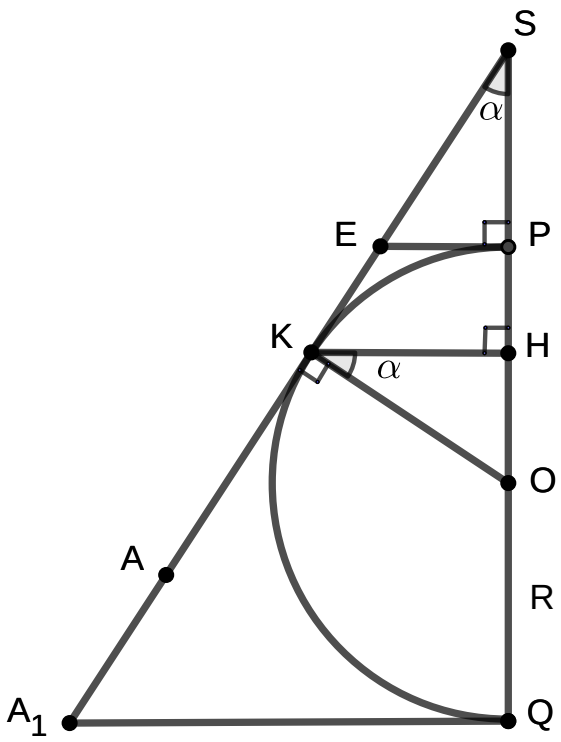

Рис. 4: вариант 14, задача 4

Решение. а) Пусть радиус сферы равен R. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK = OL = OM = R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$ (обозначим эти углы через α; $\sin\alpha = \frac{3}{4}$); высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть σ – касательная плоскость к сфере, проведённая через точку P. Обозначим точку

© МФТИ, 2020

пересечения σ и SA через E. Рассмотрим сечение пирамиды и сферы плоскостью ASO (см. рис.; на рисунке изображена лишь часть этого сечения).

Из прямоугольного треугольника KSO получаем $SO = \frac{R}{\sin\alpha}$. Тогда $SP = SO - OP = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$. Пусть площадь сечения пирамиды плоскостью σ равна $S_0 = 2$, а плоскостью τ – S_{KLM}. Из подобия следует, что $S_{KLM} : S_0 = (KH : EP)^2 = (SH : SP)^2 = (SO - OH)^2 : SP^2 = \left(\frac{R}{\sin\alpha} - R\sin\alpha\right)^2 : R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1 + \sin\alpha)^2$. Следовательно, $S_{KLM} = S_0(1 + \sin\alpha)^2 = \frac{49}{8}$.

б) Если плоскости τ и ABC параллельны, то точка A совпадает с точкой A_1 такой, что $A_1Q \perp SO$ (см. рис.). Тогда, обозначив площадь треугольника ABC через S_{ABC}, получаем $V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot SQ\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot(SO+R)\cdot S_0\cdot\left(\frac{SQ}{SP}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot(SO+SO\sin\alpha)\cdot S_0\cdot(SO+SO\sin\alpha)^2 : (SO-SO\sin\alpha)^2 = \frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_0\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^3}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{1029}{2}$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

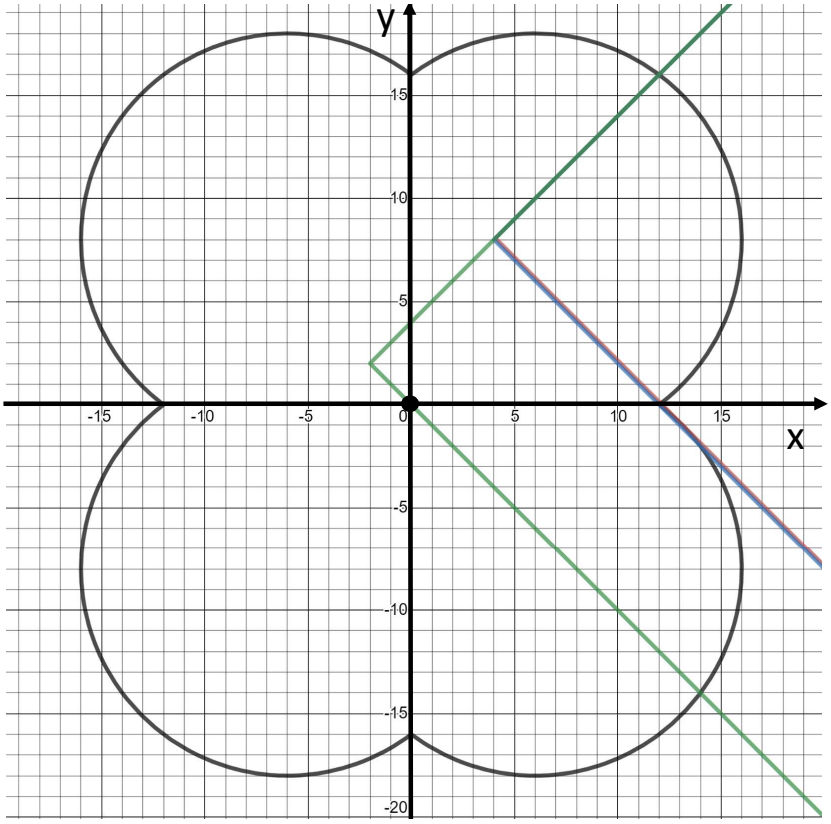

Рис. 5: вариант 14, задача 5

Ответ. $a \in \left\{4; 64; 51 + 10\sqrt{2}\right\}$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$. Это означает, что множество точек, задаваемых этим уравнением, симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти (включая её границы), раскрывая модули,

 © МФТИ, 2020

мы получаем $(x-6)^2+(y-8)^2=100$. Это уравнение задаёт окружность с центром $(6;8)$ радиуса 10. В первой четверти лежит дуга этой окружности и точка $O(0;0)$. Отображая эту дугу симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, получаем множество точек, задаваемых вторым уравнением (см. рисунок).

Геометрическое место точек, заданных первым уравнением, представляет собой совокупность двух лучей ℓ_1 и ℓ_2 с началом в точке $(\sqrt{a}-4,\sqrt{a})$, образующие с положительным направлением оси Ox углы $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$ соответственно.

Отметим, что луч ℓ_2 является частью прямой $y=x+4$ при любом a и не пересекается с полуплоскостью $x<0$. Этот луч либо пересекает график второго уравнения системы в точке $(12;16)$, либо не пересекает его вовсе. Последний случай не подходит, т.к. при нём луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения не более чем в двух точках. Таким образом, для того чтобы система имела три решения, необходимо, чтобы луч ℓ_1 пересекал график второго уравнения два раза, а луч ℓ_2 – один раз.

Рассмотрим положения луча ℓ_1 при различных a. Если $a\in(0;4)\cup(4;64)$, луч ℓ_1 пересекает только дугу окружности, лежащую в четвёртой четверти (назовём её ω). Если $a=4$, луч ℓ_1 дополнительно проходит через точку O и имеет два пересечения с графиком второго уравнения. Если $a=64$, луч ℓ_1 проходит через точку $(12;0)$, принадлежащую графику второго уравнения, а также пересекает дугу ω. При $a\in\left(64,\left(5\sqrt{2}+1\right)^2\right)$ луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения трижды: дважды он пересекает дугу ω, а один раз – дугу, лежащую в первой четверти. При $a=\left(5\sqrt{2}+1\right)^2$ луч ℓ_1 касается дуги ω и пересекает дугу окружности в первой четверти (это значение параметра найдено ниже). Наконец, при $a>\left(5\sqrt{2}+1\right)^2$ луч ℓ_1 может пересечь только дугу окружности, лежащую в первой четверти, и общее количество точек пересечения графиков не превосходит двух. Таким образом, $a\in\left\{4;64;\left(5\sqrt{2}+1\right)^2\right\}$.

Значение $a=\left(5\sqrt{2}+1\right)^2$, соответствующее касанию ℓ_1 и ω, можно найти, например, так. Пусть $Q(6;-8)$ – центр окружности, содержащей дугу ω, P – точка касания ℓ_1 и ω. Так как угловой коэффициент ℓ_1 равен (-1), то угловой коэффициент радиуса QP равен 1, откуда следует, что координаты точки P – это $\left(6+10\cos\frac{\pi}{4};-8+10\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку луч ℓ_1 с уравнением $x=-\left(y-\sqrt{a}\right)+\sqrt{a}-4$ проходит через точку P, получаем $6+5\sqrt{2}=2\sqrt{a}+4-5\sqrt{2}$, откуда $a=\left(5\sqrt{2}+1\right)^2$.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=3$.

Ответ: а) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{5}{3}$; б) $R_1=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, $R_2=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2=\alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Тогда из условия касания $\angle O_2BE=\frac{\pi}{2}-\alpha$, а $\angle BO_2P=\frac{\pi}{2}-\angle O_2BE=\alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2}=2S_{O_1BO_2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot BO_1\cdot BO_2\cdot\sin\alpha=R_1R_2\sin\alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2}O_2P\cdot BE=\frac{1}{2}R_2\cos\alpha\cdot 2R_2\sin\alpha=R_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}}=\frac{R_1}{R_2\cos\alpha}=3$, то есть $\frac{1}{3}R_1=R_2\cos\alpha$. Далее, $AB=DP$, откуда $2R_1=R_2+R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1=R_2+\frac{1}{3}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1}=\frac{5}{3}$.

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем $BD^2=AB^2+AD^2$, то есть $BD^2=4R_1^2+BP^2=4R_1^2+(R_2\sin\alpha)^2=4R_1^2+R_2^2-(R_2\cos\alpha)^2=4R_1^2+R_2^2-(2R_1-R_2)^2=4R_1R_2$. Итак, $\frac{R_2}{R_1}=\frac{5}{3}$

© МФТИ, 2020

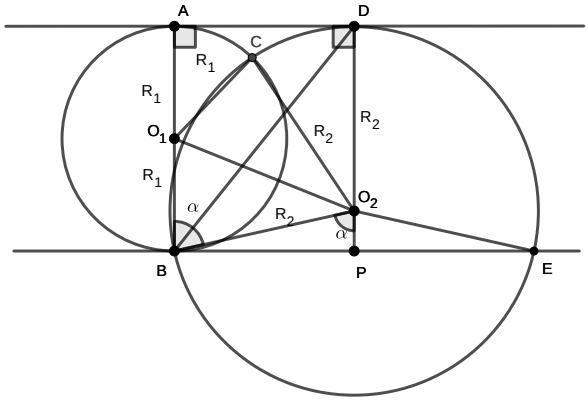

Рис. 6: вариант 14, задача 6

и $4R_1R_2 = 3^2 = 9$. Отсюда $R_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, $R_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 80 + x - 7^{80}, \\ y \leqslant \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot 7^{160} - \frac{2}{3} \cdot 7^{80} + \frac{487}{6}$.

Решение. Пусть $f(x) = \log_7 x$, $g(x) = 80 + x - 7^{80}$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вверх, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Заметим, что $f(x)$ определена только при положительных x, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$, $g(0) < 0$ и $g(1) < 0$. Поэтому абсцисса одной из общих точек лежит на интервале $0 < x < 1$. Координаты другой точки легко подбираются. Действительно, $f\left(7^{80}\right) = \log_7 7^{80} = 80 = 80 + 7^{80} - 7^{80} = g\left(7^{80}\right)$. Обозначим эти общие точки A и B соответственно, а точку $(1; 80)$ обозначим C. Пусть S_1 – количество целочисленных точек, лежащих в треугольнике ABC, включая его границу, а S_2 – количество целочисленных точек, лежащих в криволинейном треугольнике ABC (AB – часть графика логарифмической функции, BC и AC – отрезки), исключая те, которые лежат на AB. Тогда искомое количество есть $S_1 - S_2$.

Количество S_1 равно $1 + 2 + \ldots + 7^{80} = \frac{\left(1+7^{80}\right)7^{80}}{2}$. Найдём S_2. Так как $\log_7 7^k = k$, то на прямой $y = k$ лежат $7^k - 1$ требуемых точек (мы исключаем точки, лежащие на графике логарифмической функции). Тогда $S_2 = (7-1) + (7^2-1) + \ldots + (7^{80} - 1) = 7 \cdot \frac{7^{80}-1}{6} - 80 = \frac{7^{81}-487}{6}$.

Значит, $S_1 - S_2 = \frac{\left(1+7^{80}\right)7^{80}}{2} - \frac{7^{81}-487}{6} = \frac{1}{2} \cdot 7^{160} - \frac{2}{3} \cdot 7^{80} + \frac{487}{6}$.

 © МФТИ, 2020

ВАРИАНТ 15

1. [3 балла] Монету подбрасывают 110 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 61 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 49 раз. Найдите $p-q$.

   Ответ: $\frac{1}{2^{110}} \cdot C_{100}^{61}$.

   Решение. В силу того, что выпадение орла и решки равновозможны, вероятность получить 110 орлов равна вероятности получить 110 решек (т.е. 0 орлов); вероятность получить 109 орлов равна вероятности получить 109 решек (т.е. одного орла) и т.д. Обозначим вероятность, что выпало ровно k орлов через p_k. Тогда $p = p_{61} + p_{62} + \ldots + p_{110}$, $q = p_0 + p_1 + \ldots + p_{48}$, а в силу сказанного выше, $q = p_{100} + p_{109} + \ldots + p_{62}$. Значит, $p - q = p_{61}$.

   Посчитаем вероятность того, что орёл выпадает ровно 61 раз при 110 бросках. Если обозначить выпадение орла единицей, а выпадение решки нулём, то каждую последовательность из 110 бросков можно охарактеризовать последовательностью цифр из нулей и единиц. Вероятность получить любую из таких последовательностей равна $\frac{1}{2^{110}}$. Нас устроят все те последовательности событий, которые содержат ровно 61 единица. Их количество равно C_{110}^{61} (выбираем из имеющихся 110 позиций 61 позицию для единиц, после чего остальные позиции заполняются нулями). Значит, вероятность получить хотя бы одну такую последовательность равна $\frac{1}{2^{110}} \cdot C_{100}^{61}$. Это и есть p_{61}.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.

   Ответ: $x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi k}{19}$, $k \neq 19p + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

   Решение. Приводя дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получаем

$$\frac{\cos 14x \cos 5x + \cos 14x \sin 5x - \cos 5x \sin 14x + \sin 5x \sin 14x}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\cos 9x - \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}.$$

   Последнее уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} \cos 9x - \sin 9x = -\sqrt{2}\cos 10x, \\ \cos 10x \neq 0. \end{cases}$ Уравнение системы даёт

$$\cos\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 10x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k + \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{19x + \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{3\pi}{76} + \dfrac{2\pi k}{19}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

   Теперь учтём условие $\cos 10x \neq 0$.

   Если $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, то $\cos 10x = \cos\left(\frac{25\pi}{2} + 20\pi k\right) = 0$, т.е. условие $\cos 10x \neq 0$ нарушается.

   Если $x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi k}{19}$, то $\cos 10x = \cos\left(\frac{15\pi}{38} + \frac{20\pi k}{19}\right)$. Найдём те целые значения n и k, при которых выполняется равенство $\frac{15\pi}{38} + \frac{20\pi k}{19} = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Получаем $20k = 2 + 19n$, $k = n + \frac{2-n}{20}$. Поскольку $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{Z}$, отсюда следует, что $p = \frac{2-n}{20} \in \mathbb{Z}$. Значит, $n = 20p + 2$, $k = 19p + 2$. Полученные значения переменной k необходимо исключить. Окончательно получаем $x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi k}{19}$, $k \neq 19p + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $27^{\sqrt{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{\sqrt{4\log_3 x}} + 55 \cdot x^{\sqrt{\log_x 3}} \leqslant 75$.

   Ответ: $x \in (1; 3] \cup \left\{5^{\log_3 5}\right\}$.

   Решение. Заметим, что $x^{\sqrt{\log_x 3}} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\sqrt{\log_x 3}} = 3^{\sqrt{\log_3^2 x \cdot \log_x 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$. Значит, неравенство можно переписать в виде $3^{3\sqrt{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 x}} + 55 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leqslant 75$. (Отметим, что при этом

© МФТИ, 2020

изменилась область допустимых значений: исчезло ограничение $x \neq 1$, которое необходимо будет учесть в дальнейшем.) Обозначим $t = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$. Тогда получаем $t^3 - 13t^2 + 55t - 75 \leqslant 0$, или, раскладывая левую часть на множители, $(t-3)(t-5)^2 \leqslant 0$, откуда следует, что $t \in (-\infty; 3] \cup \{5\}$.

Возвращаясь к переменной x, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leqslant 3, \\ 3^{\sqrt{\log_3 x}} = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_3 x} \leqslant 1, \\ \sqrt{\log_3 x} = \log_3 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \log_3 x \leqslant 1, \\ \log_3 x = \log_3^2 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x = 5^{\log_3 5}. \end{array}\right.$$

Выше было получено, что $x \neq 1$, поэтому окончательный результат таков: $x \in (1; 3] \cup \left\{5^{\log_3 5}\right\}$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 9, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите площадь треугольника KLM.

   б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 25$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

   Ответ: а) $S_{KLM} = 12{,}25$; б) $V_{SABC} = \frac{343}{2}$.

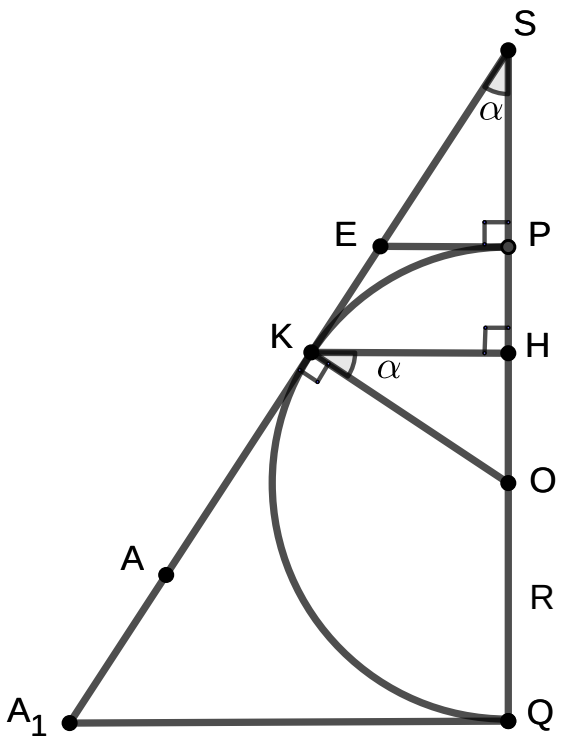

Рис. 7: вариант 15, задача 4

Решение. а) Пусть радиус сферы равен R. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK = OL = OM = R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$ (обозначим эти углы через α; $\sin\alpha = \frac{1}{6}$); высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть σ – касательная плоскость к сфере, проведённая через точку P. Обозначим точку

 © МФТИ, 2020

пересечения σ и SA через E. Рассмотрим сечение пирамиды и сферы плоскостью ASO (см. рис.; на рисунке изображена лишь часть этого сечения).

Из прямоугольного треугольника KSO получаем $SO = \frac{R}{\sin\alpha}$. Тогда $SP = SO - OP = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$. Пусть площадь сечения пирамиды плоскостью σ равна $S_0 = 9$, а плоскостью τ – S_{KLM}. Из подобия следует, что $S_{KLM} : S_0 = (KH : EP)^2 = (SH : SP)^2 = (SO - OH)^2 : SP^2 = \left(\frac{R}{\sin\alpha} - R\sin\alpha\right)^2 : R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1 + \sin\alpha)^2$. Следовательно, $S_{KLM} = S_0(1 + \sin\alpha)^2 = 12{,}25$.

б) Если плоскости τ и ABC параллельны, то точка A совпадает с точкой A_1 такой, что $A_1Q \perp SO$ (см. рис.). Тогда, обозначив площадь треугольника ABC через S_{ABC}, получаем $V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot SQ\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot(SO+R)\cdot S_0\cdot\left(\frac{SQ}{SP}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot(SO+SO\sin\alpha)\cdot S_0\cdot(SO+SO\sin\alpha)^2 : (SO - SO\sin\alpha)^2 = \frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_0\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^3}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{343}{2}$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y = -\,|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a \in \left\{1; 36; \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2\right\}$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$. Это означает, что множество точек, задаваемых этим уравнением, симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти (включая её границы), раскрывая модули, мы получаем $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$. Это уравнение задаёт окружность с центром $(12; 5)$ радиуса 13. В первой четверти лежит дуга этой окружности и точка $O(0; 0)$. Отображая эту дугу симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, получаем множество точек, задаваемых вторым уравнением (см. рисунок).

Геометрическое место точек, заданных первым уравнением, представляет собой совокупность двух лучей ℓ_1 и ℓ_2 с началом в точке $(\sqrt{a}, 2 - \sqrt{a})$, образующие с положительным направлением оси Ox углы $-\frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$ соответственно.

Отметим, что луч ℓ_2 является частью прямой $y = 2 - x$ при любом a и не пересекается с полуплоскостью $x < 0$. Этот луч либо пересекает график второго уравнения системы в точке $\left(\frac{19+\sqrt{313}}{2}; -\frac{15+\sqrt{313}}{2}\right)$, либо не пересекает его вовсе. Последний случай не подходит, т.к. при нём луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения не более чем в двух точках. Таким образом, для того чтобы система имела три решения, необходимо, чтобы луч ℓ_1 пересекал график второго уравнения два раза, а луч ℓ_2 – один раз.

Рассмотрим положения луча ℓ_1 при различных a. Если $a \in (0; 1) \cup (1; 36)$, луч ℓ_1 пересекает только дугу окружности, лежащую в третьей четверти (назовём её ω). Если $a = 1$, луч ℓ_1 дополнительно проходит через точку O и имеет два пересечения с графиком второго уравнения. Если $a = 36$, луч ℓ_1 проходит через точку $(0; -10)$, принадлежащую графику второго уравнения, а также пересекает дугу ω. При $a \in \left(36, \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2\right)$ луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения трижды: дважды он пересекает дугу ω, а один раз – дугу, лежащую во второй четверти. При $a = \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 касается дуги ω и пересекает дугу окружности во второй четверти (это значение параметра найдено ниже). Наконец, при $a > \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 может пересечь только дугу окружности, лежащую во второй четверти, и общее количество точек пересечения графиков не превосходит двух. Таким образом, $a \in \left\{1; 36; \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2\right\}$.

 © МФТИ, 2020

Значение $a = \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2$, соответствующее касанию ℓ_1 и ω, можно найти, например, так. Пусть $Q(-12;-5)$ – центр окружности, содержащей дугу ω, P – точка касания ℓ_1 и ω. Так как угловой коэффициент ℓ_1 равен 1, то угловой коэффициент радиуса QP равен (-1), откуда следует, что координаты точки P – это $\left(-12+13\cos\frac{\pi}{4}; -5-13\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку луч ℓ_1 с уравнением $y=(x-\sqrt{a})+2-\sqrt{a}$ проходит через точку P, получаем $-5-\frac{13}{\sqrt{2}} = -12-2\sqrt{a}+\frac{13}{\sqrt{2}}+2$, откуда $a = \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2}\right)^2$.

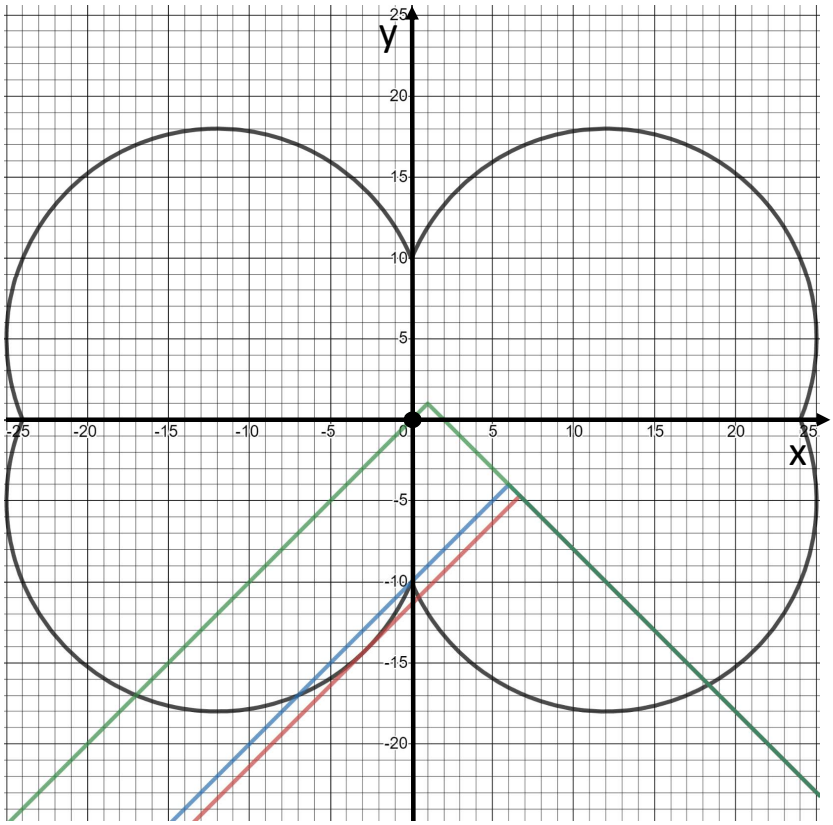

Рис. 8: вариант 15, задача 5

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 4. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 4$.

   Ответ: а) $\frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{4}$; б) $R_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $R_2 = \sqrt{7}$.

   Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2 = \alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Тогда из условия касания $\angle O_2BE = \frac{\pi}{2}-\alpha$, а $\angle BO_2P = \frac{\pi}{2} - \angle O_2BE = \alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2} = 2S_{O_1BO_2} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot BO_1\cdot BO_2\cdot\sin\alpha = R_1R_2\sin\alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2}O_2P\cdot BE = \frac{1}{2}R_2\cos\alpha\cdot 2R_2\sin\alpha = R_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R_1}{R_2\cos\alpha} = 4$, то есть $\frac{1}{4}R_1 = R_2\cos\alpha$. Далее, $AB = DP$, откуда $2R_1 = R_2 + R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1 = R_2 + \frac{1}{4}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{4}$.

 © МФТИ, 2020

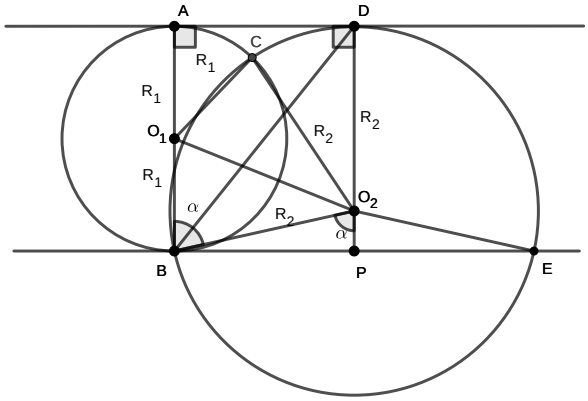

Рис. 9: вариант 15, задача 6

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем $BD^2 = AB^2 + AD^2$, то есть $BD^2 = 4R_1^2 + BP^2 = 4R_1^2 + (R_2 \sin\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (R_2\cos\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2$. Итак, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{4}$ и $4R_1R_2 = 4^2 = 16$. Отсюда $R_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $R_2 = \sqrt{7}$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 110 + x - 5^{110}, \\ y \leqslant \log_5 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot 5^{220} - \frac{3}{4} \cdot 5^{110} + \frac{445}{4}$.

Решение. Пусть $f(x) = \log_5 x$, $g(x) = 110 + x - 5^{110}$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вверх, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Заметим, что $f(x)$ определена только при положительных x, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$, $g(0) < 0$ и $g(1) < 0$. Поэтому абсцисса одной из общих точек лежит на интервале $0 < x < 1$. Координаты другой точки легко подбираются. Действительно, $f\left(5^{110}\right) = \log_5 5^{110} = 110 = 110 + 5^{110} - 5^{110} = g\left(5^{110}\right)$. Обозначим эти общие точки A и B соответственно, а точку $(1; 110)$ обозначим C. Пусть S_1 – количество целочисленных точек, лежащих в треугольнике ABC, включая его границу, а S_2 – количество целочисленных точек, лежащих в криволинейном треугольнике ABC (AB – часть графика логарифмической функции, BC и AC – отрезки), исключая те, которые лежат на AB. Тогда искомое количество есть $S_1 - S_2$.

Количество S_1 равно $1 + 2 + \ldots + 5^{110} = \frac{\left(1+5^{110}\right)5^{110}}{2}$. Найдём S_2. Так как $\log_5 5^k = k$, то на прямой $y = k$ лежат $5^k - 1$ требуемых точек (мы исключаем точки, лежащие на графике логарифмической функции). Тогда $S_2 = (5-1) + (5^2-1) + \ldots + (5^{110} - 1) = 5 \cdot \frac{5^{110}-1}{4} - 110 = \frac{5^{111}-445}{4}$.

Значит, $S_1 - S_2 = \frac{\left(1+5^{110}\right)5^{110}}{2} - \frac{5^{111}-445}{4} = \frac{1}{2} \cdot 5^{220} - \frac{3}{4} \cdot 5^{110} + \frac{445}{4}$.

© МФТИ, 2020

ВАРИАНТ 16

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p-q$

   Ответ: $-\frac{1}{2^{80}}\cdot C_{80}^{29}$.

   Решение. В силу того, что выпадение орла и решки равновозможны, вероятность получить 80 орлов равна вероятности получить 80 решек (т.е. 0 орлов); вероятность получить 79 орлов равна вероятности получить 79 решек (т.е. одного орла) и т.д. Обозначим вероятность, что выпало ровно k орлов через p_k. Тогда $p=p_{52}+p_{53}+\ldots+p_{80}$, $q=p_0+p_1+\ldots+p_{29}$, а в силу сказанного выше, $q=p_{80}+p_{79}+\ldots+p_{51}$. Значит, $p-q=-p_{51}=-p_{29}$.

   Посчитаем вероятность того, что орёл выпадает ровно 29 раз при 80 бросках. Если обозначить выпадение орла единицей, а выпадение решки нулём, то каждую последовательность из 80 бросков можно охарактеризовать последовательностью цифр из нулей и единиц. Вероятность получить любую из таких последовательностей равна $\frac{1}{2^{80}}$. Нас устроят все те последовательности событий, которые содержат ровно 29 единиц. Их количество равно C_{80}^{29} (выбираем из имеющихся 80 позиций 29 позиций для единиц, после чего остальные позиции заполняются нулями). Значит, вероятность получить хотя бы одну такую последовательность равна $\frac{1}{2^{80}}\cdot C_{80}^{29}$. Это и есть p_{29}.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x-\sin 5x}+\frac{\sin 4x}{\cos 5x+\sin 5x}=-\sqrt{2}$.

   Ответ: $x=\frac{5\pi}{76}+\frac{2\pi k}{19}$, $k\neq 19p-3$, $k\in\mathbb{Z}$, $p\in\mathbb{Z}$.

   Решение. Приводя дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получаем

$$\frac{\cos 4x\cos 5x+\cos 4x\sin 5x+\cos 5x\sin 4x-\sin 5x\sin 4x}{\cos^2 5x-\sin^2 5x}=-\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\cos 9x+\sin 9x}{\cos 10x}=-\sqrt{2}.$$

   Последнее уравнение эквивалентно системе $\begin{cases}\cos 9x+\sin 9x=-\sqrt{2}\cos 10x,\\ \cos 10x\neq 0.\end{cases}$ Уравнение системы даёт

$$\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos 10x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+\frac{\pi}{4}}{2}=\pi k+\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{19x-\frac{\pi}{4}}{2}=\pi k+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\dfrac{5\pi}{76}+\dfrac{2\pi k}{19},k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

   Теперь учтём условие $\cos 10x\neq 0$.

   Если $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, то $\cos 10x=\cos\left(\frac{15\pi}{2}+20\pi k\right)=0$, т.е. условие $\cos 10x\neq 0$ нарушается.

   Если $x=\frac{5\pi}{76}+\frac{2\pi k}{19}$, то $\cos 10x=\cos\left(\frac{25\pi}{38}+\frac{20\pi k}{19}\right)$. Найдём те целые значения n и k, при которых выполняется равенство $\frac{25\pi}{38}+\frac{20\pi k}{19}=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Получаем $20k=-3+19n$, $k=n-\frac{n+3}{20}$. Поскольку $k\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{Z}$, отсюда следует, что $p=\frac{n+3}{20}\in\mathbb{Z}$. Значит, $n=20p-3$, $k=19p-3$. Полученные значения переменной k необходимо исключить. Окончательно получаем $x=\frac{5\pi}{76}+\frac{2\pi k}{19}$, $k\neq 19p-3$, $k\in\mathbb{Z}$, $p\in\mathbb{Z}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $8^{\sqrt{\log_2 x}}-2^{\sqrt{4\log_2 x}+3}+21\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}}\leqslant 18$.

   Ответ: $x\in(1;2]\cup\left\{3^{\log_2 3}\right\}$.

   Решение. Заметим, что $x^{\sqrt{\log_x 2}}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\sqrt{\log_x 2}}=2^{\sqrt{\log_2^2 x\cdot\log_x 2}}=2^{\sqrt{\log_2 x}}$. Значит, неравенство можно переписать в виде $2^{3\sqrt{\log_2 x}}-8\cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}}+21\cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}}\leqslant 18$. (Отметим, что при этом

© МФТИ, 2020

изменилась область допустимых значений: исчезло ограничение $x \neq 1$, которое необходимо будет учесть в дальнейшем.) Обозначим $w = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$. Тогда получаем $w^3 - 8w^2 + 21w - 18 \leqslant 0$, или, раскладывая левую часть на множители, $(w-2)(w-3)^2 \leqslant 0$, откуда следует, что $w \in (-\infty; 2] \cup \{3\}$.

Возвращаясь к переменной x, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leqslant 2, \\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_2 x} \leqslant 1, \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \log_2 x \leqslant 1, \\ \log_2 x = \log_2^2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x = 3^{\log_2 3}. \end{array}\right.$$

Выше было получено, что $x \neq 1$, поэтому окончательный результат таков: $x \in (1; 2] \cup \left\{3^{\log_2 3}\right\}$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM.

   б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

   Ответ: а) $S_{KLM} = 6{,}25$; б) $V_{SABC} = \frac{250}{3}$.

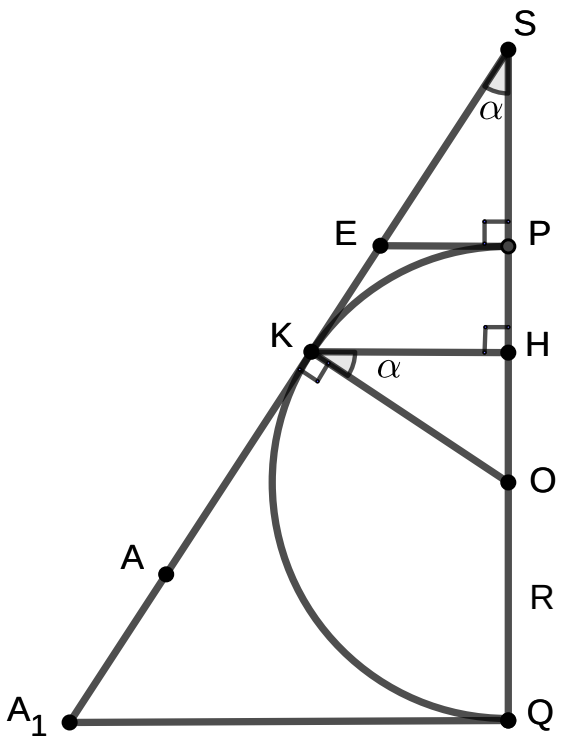

Рис. 10: вариант 16, задача 4

Решение. а) Пусть радиус сферы равен R. Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q (точка P лежит на отрезке SO, а Q – вне него). Треугольники OKS, OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK = OL = OM = R$, SO – общая), следовательно, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$ (обозначим эти углы через α; $\sin\alpha = \frac{1}{4}$); высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO, равны, а их основания – одна и та же точка H, лежащая в плоскости KLM (назовём эту плоскость τ). Пусть σ – касательная плоскость к сфере, проведённая через точку P. Обозначим точку

 © МФТИ, 2020

пересечения σ и SA через E. Рассмотрим сечение пирамиды и сферы плоскостью ASO (см. рис.; на рисунке изображена лишь часть этого сечения).

Из прямоугольного треугольника KSO получаем $SO = \frac{R}{\sin\alpha}$. Тогда $SP = SO - OP = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$. Пусть площадь сечения пирамиды плоскостью σ равна $S_0 = 4$, а плоскостью τ – S_{KLM}. Из подобия следует, что $S_{KLM} : S_0 = (KH : EP)^2 = (SH : SP)^2 = (SO - OH)^2 : SP^2 = \left(\frac{R}{\sin\alpha} - R\sin\alpha\right)^2 : R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)^2 = (1 + \sin\alpha)^2$. Следовательно, $S_{KLM} = S_0(1 + \sin\alpha)^2 = 6{,}25$.

б) Если плоскости τ и ABC параллельны, то точка A совпадает с точкой A_1 такой, что $A_1Q \perp SO$ (см. рис.). Тогда, обозначив площадь треугольника ABC через S_{ABC}, получаем $V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot SQ\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot(SO+R)\cdot S_0\cdot\left(\frac{SQ}{SP}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot(SO+SO\sin\alpha)\cdot S_0\cdot(SO+SO\sin\alpha)^2 : (SO-SO\sin\alpha)^2 = \frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_0\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^3}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{250}{3}$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x = -\,|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a \in \left\{9; 121; \left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\right\}$.

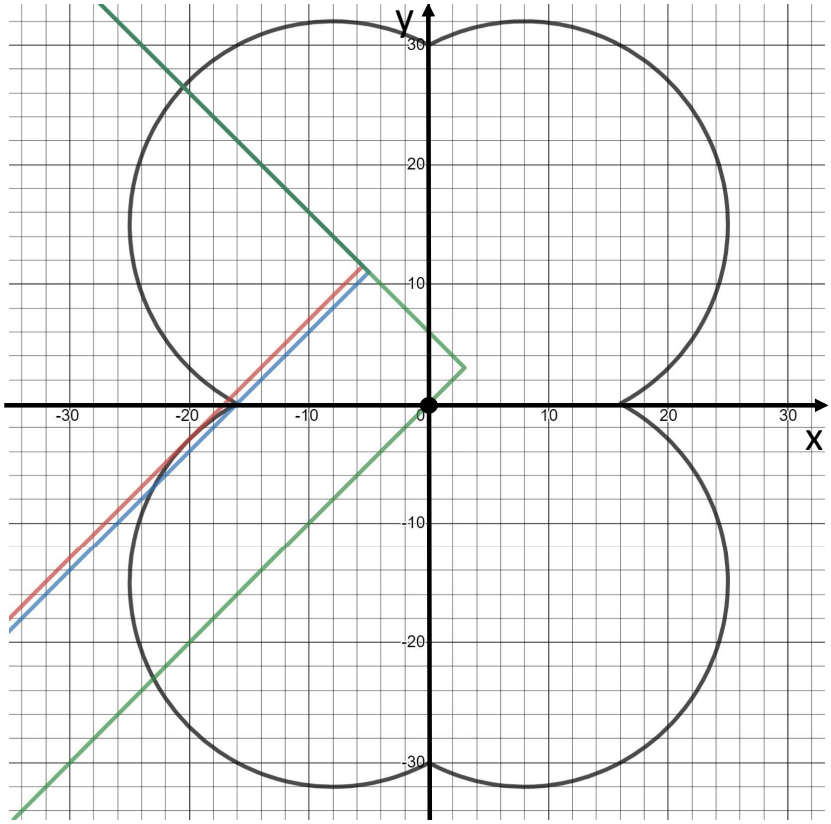

Рис. 11: вариант 16, задача 5

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$. Это означает, что множество точек, задаваемых этим уравнением, симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти (включая её границы), раскрывая модули,

 © МФТИ, 2020

мы получаем $(x-8)^2+(y-15)^2=289$. Это уравнение задаёт окружность с центром $(8;15)$ радиуса 17. В первой четверти лежит дуга этой окружности и точка $O(0;0)$. Отображая эту дугу симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, получаем множество точек, задаваемых вторым уравнением (см. рисунок).

Геометрическое место точек, заданных первым уравнением, представляет собой совокупность двух лучей ℓ_1 и ℓ_2 с началом в точке $(\sqrt{a}, 2-\sqrt{a})$, образующие с положительным направлением оси Ox углы $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ соответственно.

Отметим, что луч ℓ_2 является частью прямой $y=6-x$ при любом a и не пересекается с полуплоскостью $y<0$. Этот луч либо пересекает график второго уравнения системы в точке $\left(-\frac{17+\sqrt{577}}{2}; \frac{29+\sqrt{577}}{2}\right)$, либо не пересекает его вовсе. Последний случай не подходит, т.к. при нём луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения не более чем в двух точках. Таким образом, для того чтобы система имела три решения, необходимо, чтобы луч ℓ_1 пересекал график второго уравнения два раза, а луч ℓ_2 – один раз.

Рассмотрим положения луча ℓ_1 при различных a. Если $a\in(0;9)\cup(9;121)$, луч ℓ_1 пересекает только дугу окружности, лежащую в третьей четверти (назовём её ω). Если $a=9$, луч ℓ_1 дополнительно проходит через точку O и имеет два пересечения с графиком второго уравнения. Если $a=121$, луч ℓ_1 проходит через точку $(-16;0)$, принадлежащую графику второго уравнения, а также пересекает дугу ω. При $a\in\left(121, \left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\right)$ луч ℓ_1 пересекает график второго уравнения трижды: дважды он пересекает дугу ω, а один раз – дугу, лежащую во второй четверти. При $a=\left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 касается дуги ω и пересекает дугу окружности во второй четверти (это значение параметра найдено ниже). Наконец, при $a>\left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$ луч ℓ_1 может пересечь только дугу окружности, лежащую во второй четверти, и общее количество точек пересечения графиков не превосходит двух. Таким образом, $a\in\left\{9;121;\left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\right\}$.

Значение $a=\left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$, соответствующее касанию ℓ_1 и ω, можно найти, например, так. Пусть $Q(-8;-15)$ – центр окружности, содержащей дугу ω, P – точка касания ℓ_1 и ω. Так как угловой коэффициент ℓ_1 равен 1, то угловой коэффициент радиуса QP равен (-1), откуда следует, что координаты точки P – это $\left(-8-17\cos\frac{\pi}{4}; -15+17\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку луч ℓ_1 с уравнением $x=(y-\sqrt{a})+6-\sqrt{a}$ проходит через точку P, получаем $-8-\frac{17}{\sqrt{2}}=-15-2\sqrt{a}+\frac{17}{\sqrt{2}}+6$, откуда $a=\left(\frac{17\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=5$.

Ответ: а) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{9}{5}$; б) $R_1=\frac{5\sqrt{5}}{6}$, $R_2=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Решение. а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2=\alpha$, а прямые DO_2 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Тогда из условия касания $\angle O_2BE=\frac{\pi}{2}-\alpha$, а $\angle BO_2P=\frac{\pi}{2}-\angle O_2BE=\alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2}=2S_{O_1BO_2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot BO_1\cdot BO_2\cdot\sin\alpha=R_1R_2\sin\alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2}O_2P\cdot BE=\frac{1}{2}R_2\cos\alpha\cdot 2R_2\sin\alpha=R_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Значит, $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}}=\frac{R_1}{R_2\cos\alpha}=5$, то есть $\frac{1}{5}R_1=R_2\cos\alpha$. Далее, $AB=DP$, откуда $2R_1=R_2+R_2\cos\alpha$, следовательно $2R_1=R_2+\frac{1}{5}R_1$, и $\frac{R_2}{R_1}=\frac{9}{5}$.

© МФТИ, 2020

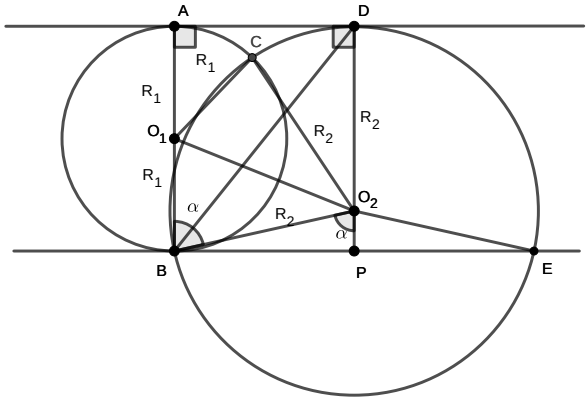

Рис. 12: вариант 16, задача 6

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем $BD^2 = AB^2 + AD^2$, то есть $BD^2 = 4R_1^2 + BP^2 = 4R_1^2 + (R_2 \sin\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (R_2\cos\alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2$. Итак, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{9}{5}$ и $4R_1R_2 = 5^2 = 25$. Отсюда $R_1 = \frac{5\sqrt{5}}{6}$, $R_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 70 + x - 4^{70}, \\ y \leqslant \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot 4^{140} - \frac{5}{6} \cdot 4^{70} + \frac{214}{3}$.

Решение. Пусть $f(x) = \log_4 x$, $g(x) = 70 + x - 4^{70}$. В силу того, что $f(x)$ выпукла вверх, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Заметим, что $f(x)$ определена только при положительных x, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$, $g(0) < 0$ и $g(1) < 0$. Поэтому абсцисса одной из общих точек лежит на интервале $0 < x < 1$. Координаты другой точки легко подбираются. Действительно, $f\left(4^{70}\right) = \log_4 4^{70} = 70 = 70 + 4^{70} - 4^{70} = g\left(4^{70}\right)$. Обозначим эти общие точки A и B соответственно, а точку $(1; 70)$ обозначим C. Пусть S_1 – количество целочисленных точек, лежащих в треугольнике ABC, включая его границу, а S_2 – количество целочисленных точек, лежащих в криволинейном треугольнике ABC (AB – часть графика логарифмической функции, BC и AC – отрезки), исключая те, которые лежат на AB. Тогда искомое количество есть $S_1 - S_2$.

Количество S_1 равно $1 + 2 + \ldots + 4^{70} = \frac{\left(1+4^{70}\right)4^{70}}{2}$. Найдём S_2. Так как $\log_4 4^k = k$, то на прямой $y = k$ лежат $4^k - 1$ требуемых точек (мы исключаем точки, лежащие на графике логарифмической функции). Тогда $S_2 = (4-1) + (4^2-1) + \ldots + (4^{70}-1) = 4 \cdot \frac{4^{70}-1}{3} - 70 = \frac{4^{71}-214}{3}$.

Значит, $S_1 - S_2 = \frac{\left(1+4^{70}\right)4^{70}}{2} - \frac{4^{71}-214}{3} = \frac{1}{2} \cdot 4^{140} - \frac{5}{6} \cdot 4^{70} + \frac{214}{3}$.

 © МФТИ, 2020

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(3 балла)** Доказано, что $p - q$ равно вероятности выпадения орла (решки) фиксированное количество раз – 1 балл;

   найдено количество способов, при которых орёл (решка) выпадает фиксированное количество раз – 1 балл;

   ответ не упрощён (оставлены биномиальные коэффициенты) – баллы не снимаются;

   вместо вероятности посчитано количество соответствующих благоприятных событий – не более 2 баллов за задачу.

---

2. **(5 баллов)** Уравнение сведено к совокупности элементарных тригонометрических уравнений – 2 балла;

   решены элементарные тригонометрические уравнения – 1 балл;

   сделан отбор корней – 2 балла;

   – если отбор сделан только в одном из случаев – 1 балл вместо 2;

   получено уравнение вида $\cos\alpha x \pm \sin\alpha x = \sqrt{2}\sin\beta x$ или $\cos\alpha x \pm \sin\alpha x = \sqrt{2}\cos\beta x$ и дальнейших продвижений нет – 1 балл за задачу.

---

3. **(5 баллов)** Неравенство сведено к кубическому – 2 балла;

   решено полученное кубическое неравенство – 1 балл;

   ответ отличается от верного конечным числом точек (т.е. потеряна изолированная точка или обретено решение $x = 1$) – снять 1 балл за каждую точку;

   ответ отличается от верного бесконечным числом точек за счёт неверного ОДЗ – не более 2 баллов за задачу.

---

4. **(5 баллов)** а) [3 балла] Доказано, что плоскость KLM параллельна касательной плоскости – 1 балл;

   б) [2 балла] решён пункт б) – 2 балла;

   задача решается в предположении, что пирамида правильная – 0 баллов за задачу.

---

5. **(6 баллов)** Изображено множество точек, удовлетворяющих одному уравнению системы и других продвижений нет ... 2 балла за задачу (если при этом изображено второе множество и потеряно начало координат – 1 балл за задачу);

   верно изображены множества точек, удовлетворяющие каждому из уравнений системы – 3 балла (если при этом изображено второе множество и потеряно начало координат – 2 балла вместо 3);

   за каждое изолированное значение параметра – по 1 баллу.

© МФТИ, 2019

6. **(5 баллов)** а) [3 балла]; отношение площадей выражено через отношение радиусов и тригонометрическую функцию – 1 балл;

   б) [2 балла]; найдено произведение радиусов – 1 балл.

---

7. **(6 баллов)** Доказано, что абсцисса одной из точек пересечения лежит на интервале $(0; 1)$ – 1 балл;

   найдены координаты второй точки пересечения – 1 балл;

   выпуклость вверх графика логарифмической функции и количество точек пересечения графиков обосновывать не обязательно;

   количество точек посчитано, но результат не представлен в требуемом виде – снять 2 балла;

   при подсчёте неверно учтены граничные точки – снять 1 балл.

© МФТИ, 2019